

4. Dvije glavice su uložene uz jednostavni kamatni račun: prva 10.000 kn uz 10% godišnje, druga 20.000 kn uz 4% godišnje. Kada će postići jednaku konačnu vrijednost? Obračun kamata je dekurzivnan, (10/85)

$$C_0 = 10000 \rightarrow \text{početna vrijednost prve glavice}$$

$$p(G)_1 = 10 \rightarrow \text{kamatni stopa godišnje od prve glavice}$$

$$C_0 = 20000 \rightarrow \text{početna vrijednost druge glavice}$$

$$p(G)_2 = 4 \rightarrow \text{kamatni stopa godišnje od druge glavice}$$

$$C_{n1} = C_{n2} \rightarrow \text{uvjet je da buduća vrijednost prve glavice bude jednaka budućoj vrijednosti druge glavice}$$

$$C_n = C_0 + K \rightarrow \text{formula za buduću vrijednost glavice uz jednostavni kamatni račun}$$

$$K = \frac{C_0 \cdot p(G) \cdot n}{100} \rightarrow \text{formula za kamata uz jednostavni kamatni račun}$$

$$C_n = C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G) \cdot n}{100} \rightarrow \text{konačna formula za buduću vrijednost glavice uz jednostavni kamatni račun}$$

$$C_{n1} = C_{n2} \rightarrow C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G)_1 \cdot n}{100} = C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G)_2 \cdot n}{100}$$

$$10000 + \frac{10000 \cdot 10 \cdot n}{100} = 20000 + \frac{20000 \cdot 4 \cdot n}{100} \quad | \cdot 100$$

$$1000000 + (10000 \cdot 10 \cdot n) = 2000000 + (20000 \cdot 4 \cdot n)$$

$$1000000 - 2000000 = 80000n - 100000n$$

$$-1000000 = -20000n \quad | : -20000$$

$$n = \frac{-1000000}{-20000} = 50 //$$

2) Na kumskoj štednoj knjižici osobe A. Ivanid nalaze se slijedeći podaci: (2)

Datum	Isplata	Uplata	Stanje
02.02.2001		3000	3000
03.03.2001	2000		1000
04.04.2001		1000	2000
06.06.2001		1000	3000
08.08.2001	1000		2000

(3/96)

Koliki je godišnji kamatnijak banka primijenila, ako su ukupne kamate 31.12.2001. iznosile 301,93 kn. Obračun kamata je jedinstavan i dekurzivno

$$K_u = \frac{(C_1 \cdot p(g) \cdot n_1) + (C_2 \cdot p(g) \cdot n_2) + (C_3 \cdot p(g) \cdot n_3) + \dots}{100} \rightarrow \text{formula za ukupne kamate (zbroj svih kamata po razdobljima)}$$

$K_u = 301,93 \rightarrow$ ukupne kamate su zadane
 $p(g) = ? \rightarrow$ kamatnijak godišnji se traži.

Izračun broja dana za ukamaćivanje

Stanje	od datuma	do datuma	dana	n
$C_1 = 3000$	02.02.2001.	03.03.2001.	$28 + 3 = 31$	$29/365 = 0,07945205479$
$C_2 = 1000$	03.03.2001.	04.04.2001.	$28 + 4 = 32$	$32/365 = 0,08767123288$
$C_3 = 2000$	04.04.2001.	06.06.2001.	$26 + 31 + 6 = 63$	$63/365 = 0,1726027397$
$C_4 = 3000$	06.06.2001.	08.08.2001.	$24 + 31 + 8 = 63$	$63/365 = 0,1726027397$
$C_5 = 2000$	08.08.2001.	31.12.2001.	$23 + 30 + 31 + 30 + 31 = 145$	$145/365 = 0,397260274$

** Primjena formule 1. način

$$301,93 = \frac{(3000 \cdot p(g) \cdot \frac{29}{365}) + (1000 \cdot p(g) \cdot \frac{32}{365}) + (2000 \cdot p(g) \cdot \frac{63}{365}) + (3000 \cdot p(g) \cdot \frac{63}{365}) + (2000 \cdot p(g) \cdot \frac{145}{365})}{100}$$

$$30193 = 238,3561644 p(g) + 97,67123288 p(g) + 345,2054795 p(g) + 517,8082192 p(g) + 794,5205479 p(g)$$

$$30193 = 1983,561647 p(g) / : 1983,561647$$

$$p(g) = \frac{30193}{1983,5616} = 15,22160945\%$$

** Primjena formule drugi način

$$301,93 = \frac{3000 \cdot p(g) \cdot 29}{36500} + \frac{1000 \cdot p(g) \cdot 32}{36500} + \frac{2000 \cdot p(g) \cdot 63}{36500} + \frac{3000 \cdot p(g) \cdot 63}{36500} + \frac{2000 \cdot p(g) \cdot 145}{36500}$$

$$11020445 = 87000 p(g) + 32000 p(g) + 126000 p(g) + 189000 p(g) + 290000 p(g)$$

$$11020445 = 724000 p(g) / : 724000$$

$$p(g) = \frac{11020445}{724000} = 15,22160912\%$$

(3)

3.) Koliko kuna treba uložiti danas u banku kako bi se osiguralo 5 godišnjih postnumerando isplata od po 30 000 i na kraju šeste godine jednokratna isplata od 50 000 kn. Obračun kamata je složen godišnji i dekurzivni. Kvartalni kamatnjak je 2 (primijenite relativni kamatnjak) (6/174)

$R = 30\,000$ → postnumerando isplate u idućih 5 godina

$C_n = 50\,000$ → buduća glavnica na kraju 6. godine

$p(d_i) = 2$ → kamatnjak kvartalni

**1. Koliko treba uložiti danas kako bi idućih 5 god mogli podići na kraju svake godine 30 000 kn (postnumerando isplate)

$A_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$ → formula za sadašnju vrijednost glavnice od budućih postnumerando isplata

$A_n = 30\,000 \cdot \frac{1,08^5 - 1}{1,08^5 \cdot (1,08 - 1)} = 119\,781,3011$ → iznos koji treba uplatiti danas da se u idućih 5 godina može podići 30 000 postnumerando isplata

Budući da se traži relativni kamatnjak, njega se računa prema

formuli $\bar{p}(d) = \frac{p(d_i)}{m}$ → $m = \frac{d_1}{d}$ → $m = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4} = 0,25$

d_1 → kamatnjak je kvartalni, pa se u nazivniku piše $1/4$ godine

d → ukamaćivanje je godišnje, pa se u brojniku piše 1 ili $1/1$ godina

→ Relativni kamatnjak tada je jednak → $\bar{p}(d) = \frac{2}{0,25} = 8$

→ r (dekurzivni kamatni faktor) → $r = 1 + \frac{\bar{p}(d)}{100} \Rightarrow 1 + \frac{8}{100} \Rightarrow r = 1,08$

**2. Kolika treba biti glavnica danas da ista za 6 godina naraste na 50 000 kn.

$C_n = C_0 \cdot r^n$ → formula za složeno dekurzivno ukamaćivanje i buduću vrijednost glavnice

$C_0 = \frac{C_n}{r^n}$ → početna vrijednost glavnice

$C_0 = \frac{50\,000}{1,08^6} = 31\,508,48134$ ili $C_0 = \frac{50\,000}{1,08^6} = \frac{50\,000}{1,586874323} = 31\,508,48134$

$X_{ukupno} = 119\,781,3011 + 31\,508,48134 = 151\,289,7824$

→ konačan iznos koji treba uložiti danas, kako bi se u budućnosti mogli podići iznosi naznačeno u zadatku.

4.) Konstantni godišnji prinos zemlje očekuje se potkraj svake godine. Koliki je taj prinos ako je sadašnja vrijednost zemljišta 125.000 kn i ako je godišnji kamatnjak 5,5.

$A_{00} = 125\,000 \rightarrow$ sadašnja vrijednost glavnice iz koje se isplaćuje (dobiva) vječna renta
 $p(G) = 5,5 \rightarrow$ godišnji kamatnjak

$A_{00} = \frac{100 \cdot R}{p(G)} \rightarrow$ formula za vječnu rentu
 $R = ?$
 $\rightarrow A_{00} = \frac{100 \cdot R}{p(G)} \cdot p(G) \rightarrow A_{00} \cdot p(G) = 100 R \quad | : 100 \rightarrow R = \frac{A_{00} \cdot p(G)}{100}$
 $R = \frac{125\,000 \cdot 5,5}{100} = 1250 \cdot 5,5 = 6875 \rightarrow$ iznos vječne rente

USMENA PITANJA

5.) Izvod formule za jednostavno anticipativno ukamaciivanje
 Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaciivanja, od glavnice s kraja tog razdoblja

Kamate za jednu godinu $\rightarrow \bar{K} = \frac{C_n \cdot q(G)}{100} \rightarrow \bar{K}$ - anticipativne kamate
 $\rightarrow C_n$ - glavnica s kraja razdoblja
 $\rightarrow q(G)$ - anticipativni godišnji kamatnjak
 Kamate za dvije godine $\rightarrow \bar{K} = 2 \cdot \frac{C_n \cdot q(G)}{100}$
 Kamate za n godina $\rightarrow \bar{K} = n \cdot \frac{C_n \cdot q(G)}{100} \quad | : n \cdot q(G) \rightarrow \frac{\bar{K}}{n \cdot q(G)} = \frac{C_n}{100} \rightarrow C_n = \frac{\bar{K} \cdot 100}{n \cdot q(G)}$
 Buduća (konačna vrijednost glavnice) uz anticipativan, jednost. obr. kamata
 $C_n = C + \bar{K} \rightarrow C_n - \bar{K} = C \rightarrow C_n - \frac{n \cdot C_n \cdot q(G)}{100} = C \rightarrow C_n \cdot \left(1 - \frac{q(G) \cdot n}{100}\right) = C$
 $\rightarrow C_n = \frac{C}{1 - \frac{q(G) \cdot n}{100}} \rightarrow C_n = \frac{\frac{C}{1}}{1 - \frac{q(G) \cdot n}{100}} \rightarrow C_n = \frac{\frac{C}{1}}{1 - \frac{q(G) \cdot n}{100}} \rightarrow C_n = \frac{C \cdot 100}{100 - q(G) \cdot n}$
 $\rightarrow C_n = \frac{C \cdot 100}{100 - q(G) \cdot n}$
 $\rightarrow C_n$ = konačna (buduća) vrijednost glavnice
 $\rightarrow C$ = početna vrijednost glavnice
 $\rightarrow q(G)$ = anticipativni godišnji kamatnjak
 $\rightarrow n$ = razdoblja ukamaciivanja

6.) Izvod formule za složeno dekurzivno ukamaciivanje
 Dekurzivan obračun kamata je obračun kamata na kraju razdoblja ukamaciivanja od glavnice s početka tog razdoblja

$\rightarrow C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} \rightarrow C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) \rightarrow$ formula za jednostavan obračun kamata i dekurzivan - za glavnica za prvu godinu
 \rightarrow za drugu godinu $C_2 = C_1 + \frac{C_1 \cdot p(G)}{100} \rightarrow C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) \rightarrow C_2 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) \rightarrow$
 $C_2 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^2$ i tako redom, pa je onda formula za n godina \rightarrow
 $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n \rightarrow C_n = C_0 \cdot r^n \rightarrow r = 1 + \frac{p(G)}{100}$
 ili $\rightarrow C_n = C_0 \cdot I_p^n \rightarrow I_p^n = \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n$

⑤

Diagram illustrating the timeline of a loan with annual payments R over n periods. The timeline starts at time 0 (labeled "POČETAK" and "UPLATA (ISPLATA)") and ends at time n (labeled "NAKON n godina"). Payments R are made at each period. The diagram shows the present value of each payment being discounted back to the start of the first period:

- Payment at time 0: R
- Payment at time 1: $R \cdot r$
- Payment at time 2: $R \cdot r^2$ (na poč. druge god.)
- Payment at time $n-1$: $R \cdot r^{n-1}$
- Payment at time n : $R \cdot r^n$

The sum of these discounted payments is set equal to the loan amount C :

$$C = C + r^n$$
$$\rightarrow S_n = R \cdot r + R \cdot r^2 + R \cdot r^3 + \dots + R \cdot r^{n-1} + R \cdot r^n$$

član u nizu). Formula za sumu geometrijske
je $a_1 = \text{prvi član niza} = R \cdot r$, a q je
a to je r . Uvrštavanjem vrijednosti u

$$C_3 = C_3 \cdot r^3$$

niza je $S_n = a_1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$ (gdje je a_1 prvi član niza = $R \cdot r$, a 2 je omjer između članova niza, a to je r). Uvrštavanjem vrijednosti u formulu dobije se $\rightarrow S_n = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$S_n = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$a_1 \rightarrow$ prvi član niza

→ omjer među članovima niza

$$S_n = R \cdot \prod_p^n \rightarrow \prod_p^n = r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$